الدرس 15

قابليّة القسمة و الموافقات

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1.1 مضاعف عدد صحيح

القول أن العدد الصحيح m مضاعف للعدد الصحيح b يعني أنه يوجد عدد صحيح c بحيث $m = bc$

مثال -

مضاعفات العدد 5 هي من الشكل $5\times c$ مع c عدد صحيح.
العددان 25 و 135- مضاعفان للعدد 5 لأن $25=5\times5$ و $-135 = 5\times(-27)$

2.1 علاقة قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

القول أن العدد الصحيح b يقسم العدد الصحيح a يعني أنه يوجد عدد صحيح c بحيث $a = b\times c$

وفي هذه الحالة نقول أن b قاسم لـ a و a قابل للقسمة على b.

ملاحظة

1) كل عدد صحيح يقسم الصفر، لكن الصفر لا يقسم أي عدد صحيح غير معدوم
2) العددان 1- و 1 يقسمان كل الأعداد الصحيحة.
3) إذا كان لدينا $a=mq$ فإن m و q قاسمان للعدد a.

مثال -

- العدد 4 يقسم 24 لأن $6\times4 = 24$
العددان 4 و 6 قاسمان للعدد 24
- العدد 5 يقسم 35 لأن $(-5)\times(-7)=35$
العددان 5- و 7- قاسمان للعدد 35

3.1 خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

أ) إذا كان b يقسم a فإن $-b$ يقسم a لأن:
من المساواة $a = bc$
نستنتج أن: $a = (-b)(-c)$

ب) إذا كان b يقسم a مع $a \neq 0$ فإن $|b| \leq |a|$ لأن:
المساواة $a = b\times c$ تستلزم $|a| = |b||c|$ وبما أن $a\neq0$ فإن $|c|\neq0$
وعليه $|b| \leq |a|$

ج) إذا كان a يقسم b و b يقسم a فإن $a = b$ أو $a = -b$ مع $a\neq0$ و $b\neq0$
لأن في هذه الحالات $|a| \leq |b|$ و $|b|\leq|a|$ إذن $|b| = |a|$
أي $a = b$ أو $a=-b$

د) إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c لأن:
فرضا نستطيع كتابة $b = a\times p$ و $c = b\times q$ مع p و q عددين صحيحين
إذن $c = (ap)q = a(pq)$ وهذا يعني أن a يقسم c.

هـ) - إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k، (a يقسم kb) و (ka يقسم kb) لأن:
a يقسم b هذا معناه أن $b= a\times p$ ومنه $kb = kap$ أي $kb = a(kp)$
وهذا يعني أن a يقسم kb.
بنفس الطريقة نبين الشطر الثاني من الخاصية.

و) إذا كان a يقسم b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين x و y
لدينا a يقسم $bx + cy$ لأن:
من الفرضية نستطيع كتابة $b = ap$ و $c = aq$ مع p و q عددين صحيحين
$$bx + cy = apx + aqy = a(px + qy)$$
مع $px + qy$ عدد صحيح إذن a يقسم $bx + cy$

مثال -

الأعداد a ، $-a$ ، 1 ، 1- هي قواسم للعدد غير المعدوم a.

تمرين تدريبي 1

1) أوجد كل الثنائيات الطبيعية (x,y) بحيث $x^2+2xy=12$ .... (I)
2) عين الأعداد الصحيحة n بحيث $n-3$ يقسم $n+5$

✓ **الحل**

1) من المساواة $x^2+2xy=12$ نستنتج أن $12 > x^2 > 0$
أي $0 < x < 3,4$ وبالتالي فإن قيم x الممكنة هي 1 ، 2 ، 3 .
المساواة (I) تكتب على الشكل $x(x+2y)=12$
وهذا يعني أن x و $x+2y$ قاسمان للعدد 12

x	1	2	3
$x+2y$	$1+2y=12$	$2+2y=6$	$3+2y=4$
y	لا يوجد	2	لا توجد

من أجل كل قيمة لـ x من $\{1,2,3\}$ نبحث عن الأعداد الطبيعية y بحيث $x+2y$ يقسم 12 . من الجدول السابق نستنتج أنه توجد ثنائية وحيدة $(2,2)$ تحقق المساواة (I)

2) بما أن $n-3$ يقسم $n-3$ و $n-3$ يقسم $n+5$ فإن $n-3$ يقسم $n+5-(n-3)$
أي $n-3$ يقسم 8
إذن $n-3$ ينتمي إلى قواسم العدد 8 والتي هي 1 ، -1 ، 2 ، -2 ، 4 ، -4 ، 8 ، -8

$n-3$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
n	4	5	7	11	2	1	-1	-5

وبالتالي n ينتمي إلى $\{4,5,7,11,2,1,-1,-5\}$

تمرين تدريبي 2

k ، a ، b أعداد طبيعية بحيث $a=6k+5$ و $b=8k+3$
بين أن القاسمين الموجبين الوحيدين الممكنين والمشتركين للعددين a و b هما 1 و 11

✓ **الحل**

ليكن d قاسم مشترك للعددين a ، b
بما أن d يقسم a و d يقسم b فإن d يقسم $4a-3b$ أي d يقسم 11
وبما أن قواسم 11 في $\mathbb{N}$ هي 1 و 11 فإن d له قيمتين ممكنتين هما 1 و 11

2 . القسمة الإقليدية

1.2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{N}$

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان مع $b \neq 0$
توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الطبيعية بحيث $a=bq+r$ و $b > r \geq 0$

الإثبات

$0 \quad b \quad 2b \quad qb \quad (q+1)b \quad (a+1)b$

بما أن b موجب تماما فإن المضاعفات الموجبة للعدد d تشكل متتالية متزايدة تماما ، لنكتب مضاعفات d من الصفر حتى $(a+1)b$
لدينا $b \geq 1$ وعليه $(a+1)b \geq a+1 > a$
إذن بالضرورة يكون a هو أحد مضاعفات b أو يكون محصورا بين مضاعفين متتاليين للعدد b
أي $a \in [qb,(q+1)b[$
وبالتالي نستطيع كتابة a على الشكل $a=bq+r$ حيث r هي المسافة بين a و bq ،
لكن هذه المسافة r هي أصغر تماما من الطول b إذن $b > r \geq 0$

وحدانية الثنائية $(q;r)$:

نفرض أنه توجد ثنائيتين (q_1,r_1) و (q_2,r_2)
بحيث $a=q_1b+r_1$ و $a=q_2b+r_2$ مع $b > r_1 \geq 0$ و $b > r_2 \geq 0$
ومنه ينتج $(q_1-q_2)b=r_2-r_1$ .... (*)
من (*) نستنتج أن b يقسم r_2-r_1 وبما أن $r_2-r_1 < b$ فإن $r_2-r_1=0$ أي $r_2=r_1$
وبالتعويض في (*) نجد $q_1-q_2=0$ أي $q_1=q_2$
إذن الثنائية (q,r) وحيدة.

تعريف

إجراء القسمة الإقليدية في المجموعة $\mathbb{N}$ للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي b مع $b \neq 0$
هي إيجاد الثنائية الطبيعية (q,r) بحيث $a=bq+r$ مع $b > r \geq 0$.
يسمى q حاصل هذه القسمة و r باقيها و b القاسم و a المقسوم.

مثال - ◆

القسمة الإقليدية لـ 12 على 5 هي $12=5\times2+2$ حيث $5 > 2 \geq 0$
القسمة الإقليدية لـ 23 على 5 هي $23=5\times4+3$ حيث $5 > 3 \geq 0$
القسمة الإقليدية لـ 31 على 50 هي $31=50\times0+31$

نتيجة

- إذا كان b عددا طبيعيا معطى فإن كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل $n = bq + r$ مع $r \in \{0, 1, ..., b-1\}$ ومنه فإن بواقي القسمة الممكنة في القسمة الإقليدية لـ n على b هي $0, 1, ..., b-1$
- القول أن b يقسم a يكافئ القول أنه في القسمة الإقليدية لـ a على b يكون الباقي معدوما.

مثال -

كل عدد طبيعي n يكتب $5p$ أو $5p+1$ أو $5p+2$ أو $5p+3$ أو $5p+4$ مع p عدد طبيعي

كل عدد طبيعي n يكتب أيضا $4p$ أو $4p+1$ أو $4p+2$ أو $4p+3$ مع p عدد طبيعي.

2 ـ 2 القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

a و b عددان صحيحان مع $b \neq 0$ عندئذ يوجد عدد صحيح وحيد q وعدد طبيعي وحيد r بحيث $a = bq + r$ و $|b| > r \geq 0$

الإثبات

نثبت هذه المبرهنة في حالة b موجب و a صحيح سالب.

نضع $a = -a'$ مع a' عدد طبيعي موجب

بما أن a' و b موجبان فإن القسمة الإقليدية لـ a' على b تعطي لنا $a' = q'b + r'$

وبالضرب في (-1) نجد $-a' = -q'b - r'$ أي $a = -q'b - r'$

نضيف $b - b$ إلى الطرف الثاني نجد $a = -q'b - r' + b - b$

أي $a = -(q'+1)b + b - r'$

وبوضع $b - r' = r$ و $-(q'+1) = q$ فإن المساواة الأخيرة تصبح $a = bq + r$

بما أن $0 \leq r' < b$ فإن $b > b - r' \geq 0$

مثال -

1) $a = 35$ و $b = -9$

القسمة الإقليدية لـ 35 على 9 تعطي $35 = 9 \times 3 + 8$ أي $35 = (-9)(-3) + 8$

وبالتالي $q = -3$ و $r = 8$

2) $a = -35$ و $b = -9$

$-35 = -9 \times 3 - 8 = -9 \times 3 - 8 + 9 - 9 = -9 \times 4 + 1 = 9(-4) + 1$

إذن $q = -4$ و $r = 1$

تمرين تدريبي 1

أوجد كل الأعداد الطبيعية n بحيث إذا قسمت على 4 يكون الباقي يساويا للحاصل.

✓ الحل

لدينا $n = 4r + r$ مع $4 > r \geq 0$ إذن $n = 5r$ مع $4 > r \geq 0$

إذن قيم r هي $0, 1, 2, 3$

وبالتالي قيم n هي $0, 5, 10, 15$

تمرين تدريبي 2

n عدد طبيعي. بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $3n^4 + 5n + 1$ يكون فرديا وأنه لا يقبل القسمة على $n(n+1)$

✓ الحل

كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل: $2p + 1$ أو $2p$ حيث p عدد طبيعي

- إذا كان $n = 2p$ فإن $3n^4$ زوجي و $5n$ زوجي
  وبالتالي $3n^4 + 5n$ زوجي وعليه يكون $3n^4 + 5n + 1$ فرديا
- إذا كان $n = 2p + 1$ فإن n^4 يكون فرديا وبالتالي $3n^4$ فردي
  إذن العدد $3n^4 + 5n + 1$ فردي (مجموعة ثلاثة أعداد فردية يساوي عدد فردي)
  إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $3n^4 + 5n + 1$ يكون عددا فرديا.
- القسمة الإقليدية للعدد $3n^4 + 5n + 1$ على العدد $n(n+1)$ تعطي لنا:
  $3n^4 + 5n + 1 = (n^2 + n)(3n^2 - 3n + 3) + 2n + 1$.
  نفرض أن $n(n+1)$ يقسم $3n^4 + 5n + 1$ وبما أن $n(n+1)$ يقسم $(n^2 + n)(3n^2 - 3n + 3)$ فإن $n(n+1)$ يقسم $2n + 1$ وهذا تناقض كون $n(n+1)$ زوجي و $2n + 1$ فردي
  إذن $n(n+1)$ لا يقسم $3n^4 + 5n + 1$.

تمرين تدريبي 3

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^2 - 1)$ مضاعف لـ 2 ومضاعف لـ 3

✓ الحل

نضع $d = n(n^2 - 1)$ وبما أن $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ فإن $d = n(n-1)(n+1)$

- نثبت أن d مضاعف لـ 2 :

بما أن $n(n-1)$ زوجي فإن d عدد زوجي لأن جداء عدد زوجي مع اي عدد آخر يكون زوجيا.

- نثبت أن d مضاعف لـ 3 :

كل عدد طبيعي n يمكن كتابته على الشكل $3p$ أو $3p+1$ أو $3p+2$ مع p عدد طبيعي.

إذا كان $n=3p$ فإن $d=3p(9p^2-1)$ فهو إذن مضاعف لـ 3

إذا كان $n=3p+1$ فإن $d=3\left[p(3p+1)(3p+2)\right]$ ومنه نستنتج أن d مضاعف لـ 3.

إذا كان $n=3p+2$ فإن $d=3\left[(p+1)(3p+1)(3p+2)\right]$ ومنه نستنتج أن d مضاعف لـ 3

إذن مهما يكن n فإن d مضاعف لـ 3.

3 . الموافقة بترديد m

تعريف

m عدد طبيعي أكبر تماما من الصفر.

القول أن العددين الصحيحين a و a' متوافقان بترديد m يعني أن لهما نفس القسمة الإقليدية على m

مبرهنة

a و a' عددان صحيحان متوافقان بترديد m يكافئ $a'-a$ يقبل القسمة على m.

الإثبات

- نفرض أن لـ a و a' نفس باقي القسمة على m بحيث $a=mq+r$ و $a'=mq'+r$

بالطرح نجد $a'-a=m(q'-q)$ وهذا يعني أن $a'-a$ يقبل القسمة على m

- نفرض أن $a'-a$ يقبل القسمة على m إذن يوجد عدد صحيح k' بحيث $a'-a=k'm$

نقسم a على m فنجد $a=mk+r$ مع $m > r \geq 0$

لكن $a'=a+k'm$ إذن $a'=mk+r+k'm$

أي $a'=(k+k')m+r$ مع $m > r \geq 0$ إذن باقي قسمة a' على m هو r.

ترميز

إذا كان a و a' متوافقان بترديد m نكتب $a'=a[m]$

و يقرأ " a' يوافق a بترديد m"

مثال -

$21 \equiv 1[2]$ لأن $(21-1)$ يقبل القسمة على 2

$-15 \equiv 1[4]$ لأن $(-15-1)$ يقبل القسمة على 4

$-1 \equiv 1[2]$ لأن $(-1-1)$ يقبل القسمة على 2

ملاحظة

1) إذا كان r باقي قسمة a على m فإن $a \equiv r[m]$

2) a يقبل القسمة على m يعني أن $a \equiv 0[m]$

خواص الموافقة

1) مهما كان الترديد فإن $a \equiv a$

2) إذا كان $a \equiv b[m]$ وإذا كان $b \equiv c[m]$ فإن $a \equiv c[m]$

3) إذا كان $a \equiv b[m]$ و $a' \equiv b'[m]$ فإن :

$a+a' \equiv b+b'[m]$ و $a-a' \equiv b-b'[m]$ و $aa' \equiv bb'[m]$

4) إذا كان $a \equiv b[m]$ فإن $a^p \equiv b^p[m]$ حيث p عدد صحيح موجب.

5) إذا كان a و b و m يقبل القسمة على نفس العدد الطبيعي الموجب C فإن :

$a \equiv b[m]$ يستلزم $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}\left[\frac{m}{c}\right]$.

الإثبات

$a \equiv b[m]$ تكافئ $a-b=km$ ......(1)

$a' \equiv b'[m]$ تكافئ $a'-b'=km'$ ......(2)

بجمع (1) و (2) نجد $(a+a')-(b+b')=(k+k')m$

وهذا يعني أن $(a+a')-(b+b')$ يقبل القسمة على m أي $a+a' \equiv b+b'[m]$

- لدينا :

$aa'-bb'=aa'-bb'-ab'+ab'=a(a'-b')+b'(a-b)$

$=a\times k'm+b'km=m(ak'+b'k)=mk''$

ومنه $aa'-bb'$ يقبل القسمة m أي $aa' \equiv bb'[M]$

نتيجة

- إذا كان $a \equiv b$ فإنه من أجل كل عدد صحيح x لدينا :

$a+x \equiv b+x$ و $a-x \equiv b-x$ و $ax \equiv bx$

- إذا كان $yx \equiv 0[m]$ فإن $x \equiv 0[m]$ أو $y \equiv 0[m]$

ملاحظة

لدينا $2\times 5 \equiv 4[6]$ وبالقسمة على 2 نتحصل على $5 \equiv 2[6]$

اي $(5-2)$ يقبل القسمة على 6 وهذا خطأ.

إذن بشكل عام لا تبسط الموافقة بقسمتها على العامل المشترك لكن إذا كان $ab \equiv ac[m]$ و a و m أوليين فيما بينهما فإنه ينتج $b \equiv c[m]$

تمرين تدريبي 1

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^7+6n \equiv 0[7]$

✓ الحل

بواقي قسمة العدد الطبيعي n على 7 هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 .

الجدول التالي يبين لنا بواقي قسمة كل من n^7 و $6n$ و $n^7 + 6n$ على 7

باقي قسمة n على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة n^7 على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $6n$ على 7	0	6	5	4	3	2	1
باقي قسمة n^7+6n على 7	0	0	0	0	0	0	0

مثال لكيفية ملء هذا الجدول

إذا كان $n = 2[7]$ فإن :

$6n = 12[7]$ اي $6n \equiv 5[7]$

$n^7 = 2^7[7]$ اي $n^7 \equiv (2^3)^2 \times 2[7]$ لكن $(2^3)^2 \equiv 1[7]$ إذن $n^7 \equiv 2[7]$

نستنتج من الجدول أنه مهما كان n فإن باقي قسمة n^7+6n مضاعف للعدد 7

اي $n^7 + 6n = 0[7]$

تمرين تدريبي ❷

أوجد باقي القسمة الإقليدية على العدد 7 لكل من العددين :

أ) $1416 + 713$ ب) 219^{20}

✓ الحل

أ)

```
713 | 7
013 |----
  7 | 101
  6
```

و

```
1416 | 7
 016 |----
   2 | 202
```

إذن $713 = 6[7]$ و $1416 = 2[7]$ ومنه نستنتج $1416 + 713 = 8[7]$

بما ان $8 = 1[7]$ فإن $1416 + 713 = 1[7]$

ب) لإيجاد باقي قسمة a^n على m نبدأ في البحث عن باقي قسمة a على m .

```
219 | 7
 09 |----
  2 | 31
```

ومنه $219 = 2[7]$ و بما ان $219 = 2[7]$ فإن $219^{20} = 2^{20}[7]$

إذن العملية آلت إلى البحث عن باقي قسمة 2^{20} على 7

لكن $2 = 2[7]$ ، $2^2 = 4[7]$ و $2^3 = 1[7]$

إذن متتالية البواقي دورية ودورها 3 .

لأن $2^4 = 2^1[7]$ ، $2^5 = 2^2[7]$ ، $2^6 = (2^3) = 1$ إذن :

- إذا كان $n = 3p$ فإن $2^n = 1$
- إذا كان $n = 3p+1$ فإن $2^n = 2$
- إذا كان $n = 3p+2$ فإن $2^n \equiv 4$

بما ان $20 = 3 \times 6 + 2$ أي $20 = 3p + 2$ مع $p = 6$ فإن $2^{20} = 4[7]$ إذن $219^{20} \equiv 4[7]$

تمرين تدريبي ❸

n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 5

1) ما هي بواقي قسمة n على 5 ؟ ثم اكتب الموافقات المقابلة للبواقي .

2) عين في كل حالة من الحالات السابقة الموافقات بترديد 5 للعدد $n^4 - 1$ ،

ثم ماذا تستنتج حول قابلية القسمة للعدد $n^4 - 1$ على 5 ؟

✓ الحل

1) بواقي قسمة اي عدد طبيعي على 5 هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4

وبما أن n ليست مضاعف لـ 5 فإن القيمة 0 مرفوضة . وبالتالي البواقي الممكنة هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

الموافقات المقابلة لهذه البواقي هي $n \equiv 1[5]$ ، $n \equiv 2[5]$ ، $n \equiv 3[5]$ ، $n \equiv 4[5]$

2) إذا كان $n = 1[5]$ فإن $n^4 = 1[5]$ وبالتالي $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإن $n^4 = 2^4[5]$ أي $n^4 \equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان $n \equiv 3[5]$ فإن $n^4 = 3^4[5]$ أي $n^4 \equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

إذا كان $n = 4[5]$ فإن $n^4 = 4^4[5]$ أي $n^4 = 1[5]$ وبالتالي $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

نستنتج مما سبق أنه إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن العدد $n^4 - 1$ مضاعف لـ 5

4 - أنظمة التعداد

إقتراح نظام تعداد هو إعطاء طريقة تسمح لنا بكتابة الأعداد بواسطة عدد منته من الرموز ، ونظام التعداد المشهور هو النظام العشري الذي يسمح بكتابة كل الأعداد باستعمال الأرقام العشرة 0 ، 1 ، 2 ، ...... ، 9 .

1.4 نشر عدد طبيعي N

مبرهنة

من أجل كل عدد طبيعي N موجب تماما ومن أجل كل عدد طبيعي $x \rangle 1$ يوجد

نشر وحيد للعدد N بحيث $N = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} .... + a_1 x^1 + a_0$

و a_0 ، a_1 ، a_2 ...... a_n أعداد طبيعية أصغر من x و $a_n \neq 0$

الإثبات

القسمة الإقليدية للعدد N على x تعطي لنا $N = R_1 x + a_0$

حيث a_0 باقي القسمة و R_1 حاصل القسمة.

وبما أن الثنائية (R_1 , a_0) وحيدة فإن هذا النشر وحيد .

بقسمة R_1 على x نجد $R_1 = R_2 x + a_1$

إذن $N = (R_1 x + a_1) x + a_0 = a_0 + a_1 x + R_1 x^2$

بقسمة R_2 على x نجد $R_2 = R_3 x + a_2$

ومنه يكون $N = a_0 + a_1 x + (R_3 x + a_2) x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + R_3 x^3$

وهكذا دواليك حتى نصل إلى حاصل قسمة R_{n+1} على x معدوم

وفي هذه الحالة يكون $N = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$

مثال -

$N = 32$ و $x = 3$ لدينا النشر التالي :

$N = 2 \times x_0^0 + 1 \times x^1 + 0 \times x^2 + 1 \times x^3$

ترميز

إذا كان $N = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$ حيث a_0 ، a_1 ، ...... a_n أعداد طبيعية و $a_n \neq 0$

ومن أجل كل $i \in [0 , n]$ يكون $a_i < x$ فإنه يمكننا أن نرمز للعدد N كالتالي :

$N = \overline{a_n a_{n-1} .... a_1 a_0}$ أو $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$

وفي هذه الحالة نقول أننا كتبنا N في نظام تعداد أساسه x .

مثال -

1) النظام الثنائي هو نظام أساسه 2 و أرقامه 0 و 1

فمثلا العدد 10 يكتب في هذا النظام ب $\overline{1010}$ والعدد 2 يكتب في هذا النظام ب 10

2) النظام الرباعي هو نظام أساسه 4 و أرقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

العدد 4 في هذا النظام يكتب 10

3) النظام الحادي عشر هو نظام اساسه 11 و ارقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α ، حيث α تمثل العدد 10

4) النظام الثاني عشر هو نظام اساسه 12 وارقامه 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α ، β حيث β تمثل الرقم 11

2.4 الإنتقال من الأساس x إلى الأساس y

ليكن N عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس x حيث $1 < x$.

إذا أردنا كتابة العدد N في النظام التعداد ذي الأساس y حيث $1 < y$ فإننا نكتب N في النظام ذي الأساس 10 ثم نكتبه في النظام ذي الأساس y .

مثال -

لدينا $N = \overline{1231}^4$ نريد كتابته في النظام ذي الأساس 5 .

$N = 1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 1 \times 4^3$

$= 1 + 12 + 32 + 64 = 109$

إذن $N = \overline{109}^{10}$

$109 = 4 \times 5^0 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^2$

إذن $\overline{109}^{10} = \overline{414}^5$

100 | 5
[4] 21 | 5
[1] 4 | 5
[4] 0

ملاحظة

- إذا كان $y = x^k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ ، فإنه يمكن الإنتقال من التعداد ذي الأساس x إلى نظام التعداد ذي الأساس y دون المرور إلى النظام العشري .

مثال -

ليكن $N = \overline{101101}^2$ و $x = 2$ و $y = 2^3$

$N = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$

$= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2) \times 8^0 + (1 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2) \times 8^1$

$= 5 \times 8^0 + 5 \times 8^1 = \overline{55}^8$

4 . 3 قابلية القسمة

كل عدد طبيعي $1 < N$ يكتب على الشكل $N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ مع $a_n \neq 0$

- قابلية القسمة على 2 :

N يقبل القسمة على 2 يكافئ a_0 يقبل القسمة على 2

أي $N \equiv 0 [2]$ يكافئ $a_0 \equiv 0 [2]$

- قابلية القسمة على 5 :

$N \equiv 0 [5]$ يكافئ $a_0 \equiv 0 [5]$

- قابلية القسمة على 3 :

$N \equiv 0 [3]$ يكافئ $a_0 + a_1 + ... + a_n \equiv 0 [3]$

- قابلية القسمة على 9 :

$N \equiv 0 [9]$ يكافئ $a_0 + a_1 + ... + a_n \equiv 0 [9]$

- قابلية القسمة على 11 :

$N \equiv 0 [11]$ يكافئ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n \equiv 0 [11]$

ـ قابلية القسمة على 25 :

$N = 0\,[25]$ يكافئ $a_0 + 10\,a_1 = 0\,[25]$

ـ قابلية القسمة على 4 :

$N \equiv 0\,[4]$ يكافئ $a_0 + 2\,a_1 \equiv 0\,[4]$

مثال - ♦

العدد 1236 يقبل القسمة على 3 لأن $1+2+3+6 \equiv 0\,[3]$

العدد 1331 يقبل القسمة على 11 لأن $1-3+3-1 \equiv 0\,[11]$

العدد 1024 يقبل القسمة على 4 لأن $4+2\times 2 \equiv 0\,[4]$

تمرين تدريبي

A عدد يكتب في النظام السباعي بـ 16524 اكتب هذا العدد في النظام ذي الأساس 12

✓ الحل

يكتب A في النظام العشري

$A = 4\times 7^0 + 2\times 7^1 + 5\times 7^2 + 6\times 7^3 + 1\times 7^4$

$= 4 + 14 + 245 + 2058 + 2401 = 4722$

4722 | 12
[6] 393 | 12
[9] 32 | 12
[8] 2 | 12
[2] 0

إذن $A = \overline{2896}^{12}$

تطبيقات نموذجية

تطبيق ❶ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1) أوجد كل قواسم 15 في $\mathbb{N}$

2) أوجد كل الثنائيات الطبيعية (x, y) بحيث $x^2 - y^2 = 15$ .... (I)

✓ الحل

1) لدينا $5 \times 3 = 15$ ومنه قواسم 15 هي 1 ، 3 ، 5 ، 15

2) المعادلة (I) تكتب على الشكل $(x-y)(x+y) = 15$

ومنه نستنتج أن $x-y$ و $x+y$ قاسمان لـ 15 .

وبما أن $x+y > x-y$ فان $(x+y)=15$ و $(x-y)=1$ أو $x+y=5$ و $x-y=3$

إذا كان $\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=1 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$

إذا كان $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ فان $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

إذن مجموعة الثنائيات (x, y) التي تحقق المعادلة (I) هي $(8,7)$ و $(4,1)$

تطبيق ❷ القسمة الاقليدية

a عدد طبيعي غير معدوم.

علما أن حاصل قسمة 990 على a يساوي 39

1) اكتب العلاقة التي تترجم هذه القسمة.

2-أ) بين أن $39a \leq 990 < 40a$

ب) استنتج a وباقي القسمة r.

✓ الحل

1) العلاقة التي تترجم هذه القسمة هي $990 = 39a + r$ مع $0 \leq r < a$

2) أ) بما أن $r \geq 0$ فان $990 \geq 39a$ ..... (1)

بما أن $r < a$ فان $39a+r < 40a$ أي $990 < 40a$ ...... (2)

من (1) و (2) نجد $40a > 990 \geq 39a$

ب) من (1) نجد $a \leq \frac{990}{39}$ أي $a \leq 25,38$

من (2) نجد $a > \frac{990}{40}$ أي $a > 24,75$

إذن $25,38 > a \geq 24,75$ وبما أن a عدد طبيعي فان $a = 25$

ومنه $r = 990 - 39 \times 25 = 15$

تطبيق 3

القسمة الإقليدية

مجموع عددين a و b هو 16 وحاصل وباقي القسمة الإقليدية لـ a على b هما على التوالي 2 ، 1 . عين a و b .

الحل

لدينا $a + b = 16$ و $a = 2b + 1$

بعد تعويض a في المساواة $a + b = 16$ نجد $3b = 15$ ومنه $b = 5$

إذن $a = 2 \times 5 + 1 = 11$

تطبيق 4

القسمة الإقليدية

a و b عددان طبيعيان في القسمة الإقليدية لـ a على b يكون باقي القسمة r أكبر أو يساوي من حاصل القسمة q

1) بين انه إذا قسمنا a على $b + 1$ فاننا نحصل على نفس حاصل القسمة

2) إذا علمت ان باقي قسمة a على 21 هو 14 وباقي قسمته على 22 هو 13 فأوجد a.

الحل

1) لدينا $a = qb + r$ مع $r \geq q$

المساواة $a = qb + r$ تكتب أيضا على الشكل $a = qb + r + q - q$

أي $a = q(b+1) + (r-q)$

بما أن $r \geq q$ فان $r - q \geq 0$

بما أن $q \geq r$ و $r < b$ فان $r - q < b - r < b < b+1$

إذن حاصل قسمة a على $b + 1$ هو q

2) لدينا $a = 21q + 14$ و $a = 22q' + 13$

بما أن $22 = 21 + 1$ و $q < 14$ فان $q = q'$

إذن $a = 21q + 14$ و $a = 22q + 13$

ومنه ينتج $a = 22q + 13 = 21q + 14$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $q = 1$

وبالتالي $a = 21 \times 1 + 14 = 35$

تطبيق 5

القسمة الإقليدية

a و b عددان طبيعيان، حاصل وباقي القسمة a على b هما على التوالي q و r

نضيف للعدد a عددا صحيحا h .

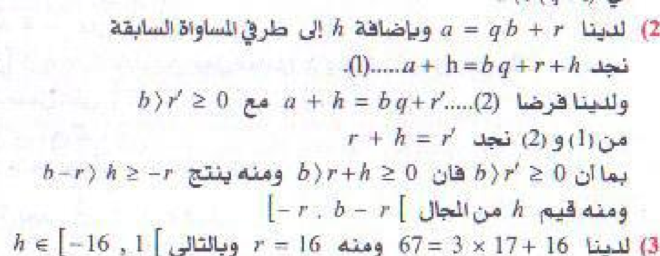
1) مثل على محور الأعداد الحقيقية الأعداد a ، bq ، $b(q+1)$

2) من اجل أي قيم لـ h يكون حاصل قسمة $h + a$ على b هو q

3) أوجد قيم h في حالة $a = 67$ و $b = 17$

الحل

1) لدينا $a = qb + r$ مع $b > r \geq 0$



بإضافة b إلى طرف المساواة $a = qb + r$

نجد $a + b = b(q+1) + r$

ومنه ينتج $a - b(q+1) = r - b$

وبما أن $r - b < 0$ فان $a - b(q+1) < 0$

أي $a < b(q+1)$

2) لدينا $a = qb + r$ وبإضافة h إلى طرفي المساواة السابقة

نجد $a + h = bq + r + h$.....(1).

ولدينا فرضا $a + h = bq + r'$.....(2) مع $b > r' \geq 0$

من (1) و (2) نجد $r + h = r'$

بما أن $b > r' \geq 0$ فان $b > r + h \geq 0$ ومنه ينتج $b - r > h \geq -r$

ومنه قيم h من المجال $[-r \, ; \, b - r[$

3) لدينا $67 = 3 \times 17 + 16$ ومنه $r = 16$ وبالتالي $h \in [-16 \, , \, 1[$

تطبيق 6

تعيين باقي القسمة باستعمال الموافقة

1) بين أن $5^2 \equiv -1[13]$ و $5^4 \equiv 1[13]$

2) k عدد طبيعي بين أن $5^{4k} \equiv 1[13]$ ثم استنتج باقي قسمة العدد 148^{2007} على 13

الحل

1) لدينا $5^2 \equiv 12[13]$ ولدينا أيضا $12 = 1\times 13 - 1$

ومنه $12 \equiv -1[13]$ إذن $5^2 \equiv -1[13]$

بما أن $5^2 \equiv -1[13]$ فإن $(5^2)^2 \equiv (-1)^2[13]$ أي $5^4 \equiv 1[13]$

2) بما أن $5^4 \equiv 1[13]$ فإن $(5^4)^k \equiv (1)^k[13]$ أي $5^{4k} \equiv 1[13]$ مع k عدد طبيعي.

بما أن $148 \equiv 5[13]$ فإن $148^{2007} \equiv 5^{2007}[13]$

لكن $2007 = 4\times 501 + 3$ إذن $148^{2007} \equiv 5^{4\times 501}\times 5^3[13]$

لدينا $5^{4\times 501} \equiv 1[13]$ و $5^3 \equiv 8[13]$

ومنه ينتج $5^{4\times 501+3} \equiv 8[13]$

إذن باقي قسمة 148^{2007} على 13 هو 8.

تطبيق 7 — حل معادلات باستعمال الموافقة

حل في $\mathbb{Z}$ الجملتين $\begin{cases}2x+1 \equiv -3[7]\\ 25 \ge x \ge 0\end{cases}$ و $\begin{cases}2x+1 \equiv -2[7]\\ 25 \ge x \ge 0\end{cases}$

الحل

1) $2x+1 \equiv -3[7]$ تكافئ $2x \equiv -4[7]$

وبما أن $-4 \equiv 3[7]$ فإن $2x \equiv 3[7]$

لحل المعادلة $2x \equiv 3[7]$ لابد من جعل معامل x يساوي 1 ومن أجل ذلك نضرب الطرفين في 4 نحصل على $8x \equiv 12[7]$ أي $x \equiv 5[7]$

إذن $x = 7k + 5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

وبما أن $25 \ge x \ge 0$ فإن $20 \ge 7k \ge -5$

وبالقسمة على 7 نجد $2{,}8 \ge k \ge \frac{-5}{7}$

إذن $k \in \{0,1,2\}$ وعليه $x \in \{5,12,19\}$

2) $2x+1 \equiv -2[7]$ تكافئ $2x \equiv -3[7]$

بما أن $-3 \equiv 4[7]$ فإن $2x \equiv 4[7]$

بما أن $2x \equiv 4[7]$ و 2 و 7 أوليان فيما بينهما فإننا نستطيع القسمة على 2

فنجد $x \equiv 2[7]$ وهذا يعني $x = 7k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$25 \ge x \ge 0$ يكافئ $23 \ge 7k \ge -2$ يكافئ $\frac{23}{7} \ge k \ge \frac{-2}{7}$

ومنه $k \in \{0,1,2,3\}$ إذن $x \in \{2,9,16,23\}$

تطبيق 8 — تعيين باقي القسمة باستعمال الموافقة

1) تحقق أن 999 يقبل القسمة على 27

2) بين أن $10^{3n} \equiv 1[27]$

3) ما هو باقي قسمة العدد $100^{10} + 10^{100}$ على 27؟

الحل

1) $999 = 37 \times 27 + 0$ ومنه العدد 999 يقبل القسمة على 27

2) لدينا $10^{3n} = (10^3)^n$ و $10^3 = 999 + 1$

إذن $10^3 \equiv 1[27]$ وبالتالي $(10^3)^n \equiv 1^n[27]$ وعليه $10^{3n} \equiv 1[27]$

3) $10^{100} = 10^{3\times 33+1}$ و $100^{10} = 10^{20} = 10^{3\times 6+2}$

لكن $10^{3n} \equiv 1[27]$ إذن $10^{3\times 33} \equiv 1[27]$ و $10^{3\times 6} \equiv 1[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 10^{3\times 33+1} + 10^{3\times 6+2}[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 10^1 + 10^2[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 110[27]$

$10^{100} + 100^{10} \equiv 2[27]$

إذن باقي قسمة $10^{100} + 100^{10}$ على 27 هو 2

تطبيق 9 — إثبات باستعمال الموافقة قابلية قسمة عدد

1) تحقق أن $3^3 \equiv 1[13]$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{3n} \equiv 1[13]$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0[13]$

الحل

1) لدينا $3^3 = 27 = 2\times 13 + 1$ ومنه $3^3 \equiv 1[13]$

لدينا $3^{3n} = (3^3)^n$ ولكن $3^3 \equiv 1[13]$ إذن $(3^3)^n \equiv 1^n[13]$ أي $3^{3n} \equiv 1[13]$

2) إثبات أن $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0[13]$

لدينا $3^{6n} = (3^{3n})^2$ لكن $3^{3n} \equiv 1[13]$ إذن $(3^{3n})^2 \equiv 1^2[13]$

أي $3^{6n} \equiv 1[13]$

$\begin{cases}3^{6n} \equiv 1[13]\\ 3^2 \equiv 9[13]\end{cases}$ ومنه ينتج $3^{6n+2} \equiv 9[13]$

$\begin{cases} 3^{3n} \equiv 1 \ [13] \\ 3^{1} \equiv 3 \ [13] \end{cases}$ ومنه ينتج $3^{3n+1} \equiv 3 \ [13]$

إذن $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 9+3+1 \ [13]$

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 13 \ [13]$

$3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 0 \ [13]$

تطبيق 10 تعيين باقي قسمة القوى الطبيعية لعدد

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2^{3n}-1$ قابلا للقسمة على 7

2) استنتج أن العددين $2^{3n+1}-2$ و $2^{3n+2}-4$ يقبلان القسمة على 7

3) عين باقي قسمة قوى العدد 2 على 7.

الحل

1) نسمي p_n الخاصية "$2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7"

P_0 صحيحة لان $2^{3\times 0}-1=0$ و 0 يقبل القسمة على 7

نفرض أن p_n صحيحة أي $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $2^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على 7

$2^{3(n+1)}-1=2^{3n+3}-1=2^{3n}\times 8-1$

$=2^{3n}(1+7)-1$

$=2^{3n}-1+7\times 2^{3n}$

بما أن $2^{3n}-1$ و 7×2^{3n} يقبلان القسمة على 7 فإن مجموعهما يقبل القسمة على 7

أي $3^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 إذن p_{n+1} صحيحة

وبالتالي p_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) لدينا $2^{3n}-1\equiv 0 \ [7]$ ومنه $2^{3n}\equiv 1 \ [7]$

$\begin{cases} 2^{3n}\equiv 1 \ [7] \\ 2^{1}\equiv 2 \ [7] \end{cases}$ ومنه ينتج $2^{3n+1}\equiv 2 \ [7]$

$\begin{cases} 2^{3n+1}\equiv 2 \ [7] \\ -2\equiv -2 \ [7] \end{cases}$ ينتج $2^{3n+1}-2\equiv 0 \ [7]$

من الجملة $\begin{cases} 2^{3n}\equiv 1 \ [7] \\ 2^{2}\equiv 4 \ [7] \end{cases}$ ينتج $2^{3n+2}\equiv 4 \ [7]$

من الجملة $\begin{cases} 2^{3n+2}\equiv 4 \ [7] \\ -4\equiv -4 \ [7] \end{cases}$ ينتج $2^{3n+2}-4\equiv 0 \ [7]$

3) من اجل كل عدد طبيعي p لدينا $p=3n$ أو $p=3n+1$ أو $p=3n+2$

إذا كان $p=3n$ فإن $2^{p}\equiv 1 \ [7]$

إذا كان $p=3n+1$ فإن $2^{p}\equiv 2 \ [7]$

إذا كان $p=3n+2$ فإن $2^{p}\equiv 4 \ [7]$

تطبيق 11 قابلية القسمة

n عدد طبيعي.

1) بين أن العددين $A=n^2+5n+4$ و $B=n^2+3n+2$ يقبلان القسمة على $n+1$

2) عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون العدد $C=3n^2+15n+19$ قابلا القسمة على $n+1$

3) استنتج أنه مهما يكن n فإن العدد $3n^2+15n+19$ غير قابل للقسمة على n^2+3n+2.

الحل

1) لدينا $n^2+5n+4=(n+1)(n+4)$ و $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

ومنه $n+1$ يقسم كل من n^2+5n+4 و n^2+3n+2

2) لدينا $3n^2+15n+19=(n+1)(3n+12)+7$ حتى يقبل العدد $3n^2+15n+19$

يجب أن يقبل العدد 7 القسمة على $n+1$

أي $n+1$ ينتمي إلى $\{1,7\}$

إذن القيم الممكنة لـ n هي 0 ، 6

3) من اجل كل عدد طبيعي $n\neq 0$ و $n\neq 6$ لدينا:

$3n^2+15n+19$ لا يقبل القسمة على $n+1$

وبالتالي لا يقبل القسمة على n^2+3n+2

من أجل $n=0$ يكون $A=2$ و $C=19$ و 2 لا يقسم 19

من أجل $n=6$ يكون $A=56$ و $C=217$ و 56 لا يقسم 217

إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فإن A لا يقسم C

تطبيق 12 — استعمال الموافقة لإثبات قابلية قسمة عدد على عدد ثابت

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = 5n^3 + n$

1-أ) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n

$U_{n+1} - U_n = 3[5n(n+1)+2]$

ب) بين بالتراجع انه من اجل كل n فإن U_n يقبل القسمة على 6

2) باستعمال الموافقة بين انه من أجل كل n فإن U_n يقبل القسمة على 6

✓ الحل

1) أ) $U_{n+1}-U_n = [5(n+1)^3+(n+1)]-[5n^3+n]$

$= 5[(n+1)^3-n^3]+1$

$=5[(n+1)^2+(n+1)n+n^2]+1$

$=5[3n^2+3n+1]+1$

$=3[5n(n+1)+2]$

ب) نسمي p_n الخاصية "U_n يقبل القسمة على 6"

p_0 صحيحة لان $U_0=0$ و 0 يقبل القسمة على 6

- نفرض ان p_n صحيحة اي U_n يقبل القسمة على 6

ونبرهن ان p_{n+1} صحيحة اي U_{n+1} يقبل القسمة على 6

لدينا $n(n+1)$ زوجي وبالتالي العدد $5n(n+1)+2$ يقبل القسمة على 2

إذن العدد $3[5n(n+1)+2]$ يقبل القسمة على 6

لدينا من السؤال ا) $U_{n+1} = U_n + 3[5(n+1)+2]$

وبما أن مجموع عددين يقبلان القسمة على 6 هو عدد يقبل القسمة على 6 فان p_{n+1} يقبل القسمة على 6.

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي P_n صحيحة من اجل كل n

2) كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n = 6p+r$ مع $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$

الجدول التالي يبين بواقي قسمة U_n على 6 من اجل كل قيم n السابقة:

باقي قسمة n على 6	0	1	2	3	4	5
باقي قسمة $5n^3$	0	5	4	3	2	1
باقي قسمة U_n على 6	0	0	0	0	0	0

من الجدول نستنتج أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فان $5n^3+n$ يقبل القسمة على 6

تطبيق 13 — حل المعادلات باستعمال الموافقة

1) عين (γ_1) مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث العدد $n=x^2+x-2$ يقبل القسمة على 7 .

2) عين (γ_2) مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث العدد $n=x^2+x-2$ يقبل القسمة على 3 .

3) k عدد صحيح. تحقق أنه إذا كان $x=1+21k$ أو $x=-2+21k$ فان n يقبل القسمة على 42 .

✓ الحل

1) $x^2+x-2\equiv 0[7]$ تكافئ $x^2-6x+5\equiv 0[7]$

تكافئ $(x-1)(x-5)\equiv 0[7]$

تكافئ $(x-1)\equiv 0[7]$ أو $(x-5)\equiv 0[7]$

تكافئ $x\equiv 1[7]$ أو $x\equiv 5[7]$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي من الشكل $7p+1$ أو $7p+5$ مع $p\in\mathbb{Z}$

2) $x^2+x-2\equiv 0[3]$ تكافئ $x^2-2x+1\equiv 0[3]$

تكافئ $(x-1)^2\equiv 0[3]$

تكافئ $x-1\equiv 0[3]$

تكافئ $x\equiv 1[3]$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي من الشكل $1+3p'$ مع p' ينتمي إلى $\mathbb{Z}$

3) - إذا كان $x=1+21k$ فان $x\equiv 1[7]$ و $x\equiv 1[3]$

وفي هذه الحالة $n\equiv 0[7]$ و $n\equiv 0[3]$ وبما أن 3 و 7 أوليان فان $n\equiv 0[21]$

وبما أن $n=x(1+x)-2$ و $x(x+1)$ زوجي فان n زوجي

وبالتالي n يقبل القسمة على 21×2 أي يقبل القسمة على 42

بنفس الطريقة نثبت ان $n\equiv 0[42]$ في حالة $x=-2+21k$

تطبيق 14 — الموافقات وقابلية القسمة

عين الأعداد الطبيعية n بحيث $n\times 7^n+4n+1\equiv 0[8]$ ......(I)

✓ الحل

مهما يكن العدد الطبيعي n فان $7^n\equiv(-1)^n[8]$

- إذا كان n زوجيا أي $n=2p$ فان $7^n\equiv 1[8]$

وبالتالي الموافقة (I) تكتب $5n+1 \equiv 0[8]$ أي $2p+1 \equiv 0[8]$

ومنه نجد $2p \equiv 7[8]$ وهذا خطأ كون $2p$ زوجي و 7 فردي

- إذا كان n فرديا أي $n = 2p+1$ فإن $7^n \equiv -1[8]$

وبالتالي المتوافقة (I) تكتب $3n+1 \equiv 0[8]$

ومنه نجد $6p \equiv 4[8]$ وبالقسمة على 2 نجد $3p \equiv 2[4]$

$3p \equiv 2[4]$ تكافئ $9p \equiv 6[4]$

تكافئ $p \equiv 2[4]$

تكافئ $p = 4k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$

إذن $n = 2(4k+2)+1 = 8k+5$

تطبيق 15 الموافقات وقابلية القسمة

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نضع $U_n = 1+3+3^2+.....+3^{n-1}$

1-أ) بين أنه إذا كان $U_n \equiv 0[7]$ فإن $3^n - 1 \equiv 0[7]$

ب) بين أنه إذا كان $3^n - 1 \equiv 0[7]$ فإن $2U_n \equiv 0[7]$

ثم وباستعمال جدول الموافقات استنتج أن $U_n \equiv 0[7]$

2) استنتج قيم n التي من اجلها $U_n \equiv 0[7]$

الحل

1) أ) U_n مجموعة n حد الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 3

وبالتالي $U_n = \frac{3^n - 1}{2}$

إذا كان $U_n \equiv 0[7]$ فإن $2U_n \equiv 0[7]$ وبما أن $2U_n = 3^n - 1$ فإن $3^n - 1 \equiv 0[7]$

ب) بما أن $2U_n = 3^n - 1$ و $3^n - 1 \equiv 0[7]$ فإن $2U_n \equiv 0[7]$

باقي قسمة U_n على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $2U_n$ على 7	0	2	4	6	1	3	5

من الجدول نستنتج أنه إذا كان $2U_n \equiv 0[7]$ فإن $U_n \equiv 0[7]$

2) $U_n \equiv 0[7]$ تكافئ $3^n - 1 \equiv 0[7]$ تكافئ $3^n \equiv 1[7]$

إذن لمعرفة قيم n ندرس بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ،

$3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$

إذن البواقي تشكل متتالية دورية دورها 6

وبالتالي $3^n \equiv 1[7]$ يكافئ $n = 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$

وعليه مجموعة قيم n التي من اجلها يكون $U_n \equiv 0[7]$ هي من الشكل $6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

تطبيق 16 تعيين رقم آحاد عدد طبيعي

1) ادرس حسب قيم n باقي قسمة 7^n على 10

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $A = 1+7+....+7^n$

ما هو رقم آحاد A ؟

الحل

1) $7^0 \equiv 1[10]$ ، $7^1 \equiv 7[10]$ ، $7^2 \equiv 9[10]$ ، $7^3 \equiv 3[10]$ ، $7^4 \equiv 1[10]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 10 تشكل متتالية دورية دورها 4

من اجل كل عدد طبيعي n فإن $n = 4p+r$ حيث $r \in \{0,1,2,3\}$

من اجل كل p من $\mathbb{N}$ لدينا :

$7^4 \equiv 1[10]$ تستلزم $7^{4p} \equiv 1[10]$

- من اجل $n = 4p$ يكون $7^n \equiv 1[10]$
- من اجل $n = 4p+1$ ؛

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^1 \equiv 7[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^{4p+1} \equiv 7[10]$ أي $7^n \equiv 7[10]$

- من اجل $n = 4p+2$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^2 \equiv 9[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^n \equiv 9[10]$

- من اجل $n = 4p+3$

$\begin{cases} 7^{4p} \equiv 1[10] \\ 7^3 \equiv 3[10] \end{cases}$ ومنه ينتج $7^{4p+3} \equiv 3[10]$ أي $7^n \equiv 3[10]$

2) - إذا كان $n = 4p$ فإن $A = 1+7+....+7^{4p}$

$A = 1+7+...+7^{4p}$

$A = (1+7^1+7^2+7^3)+.....+(7^{4p-4}+7^{4p-3}+7^{4p-2}+7^{4p-1})+7^{4p}$

$$A = \underbrace{20 + 20 + ... + 20}_{\text{مرة}} + 1 [10]$$

$$A \equiv 1 [10]$$

إذن رقم آحاد A هو 1

ـ إذا كان $n = 4p + 1$ فان :

$$A = (\underbrace{1 + 7^1 + 7^2 + 7^3) + ... + (7^{4p-4} + 7^{4p-3} + 7^{4p-2} + 7^{4p-1}}_{p}) + 7^{4p} + 7^{4p+1}$$

$$A \equiv \underbrace{20 + 20 + ... + 20}_{} + 1 + 7 [10]$$

ومنه $A \equiv 8 [10]$

وبالتالي رقم آحاد A هو 8

بنفس الطريقة إذا كان $n = 4p + 2$ نجد رقم آحاد A هو 7

وإذا كان $n = 4p + 3$ فان رقم آحاد A هو 0

تطبيق 17 تعيين أساس نظام التعداد

n عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{4x3}^5$ ويكتب $\overline{x30}^9$

1) عين الرقم x ثم أحسب n في النظام العشري.

2) عين أساس نظام التعداد الذي يكون فيه $\overline{132}^y = \overline{53}^y + \overline{46}^y$ واحسب في هذا النظام $\overline{16}^y \times \overline{32}^y$.

✓ الحل

1) لدينا $n = 3 + 5x + 4 \times 5^2$

ومن جهة أخرى لدينا $n = 0 + 3 \times 9 + x \times 9^2$

إذن $3 + 5 + 100 = 27 + 81x$ وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 1$

إذن $n = \overline{130}^9 = \overline{413}^5$

ـ كتابة n في النظام العشري :

$$n = \overline{130}^9 = 0 + 3 \times 9 + 1 \times 9^2 = 27 + 81 = 108$$

2) $\begin{cases} \overline{132}^y = \overline{53}^y + \overline{46}^y \\ y > 6 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y^2 + 3y + 2 = 6 + 4y + 3 + 5y \\ y > 6 \end{cases}$ تكافئ $y = 7$

حساب $\overline{32}^7 \times \overline{46}^7$:

```
   46
  ×32
 ----
  125
 204·
 ----
 2165
```


تطبيق 18 كتابة عدد في نظام التعداد ذو الأساس a

ليكن a عدد طبيعي اكبر تماما من 2 ولدينا العددان التاليان :

$y = (a-1)^2$ و $x = 2(a-1)$

1) اكتب x و y في نظام التعداد ذو الأساس a

2) تحقق من أن x و y يتألفان من نفس الأرقام وبترتيب معاكس.

✓ الحل

1) لدينا فرضا $a > 2$ إذن يمكننا وضع $a = 2 + \alpha$ حيث $\alpha > 0$

$a = 2 + \alpha$ يكافئ $-a + \alpha = -2$

$$x = 2a - 2 = 2a - a + \alpha = a + \alpha$$

$$= \alpha \times a^0 + 1 \times a^1 = \overline{1\alpha}^a$$

$$y = a^2 - 2a + 1 = a^2 + (-a + \alpha)a + 1$$

$$y = \alpha a + 1 = \overline{\alpha 1}^a$$

2) من السؤال 1) نستنتج ان x و y يتألفان من الرقمين 1 و α بترتيب معاكس.

تطبيق 19 كتابة عدد في نظام التعداد ذو الأساس a

لتكن x ، y ، z ثلاثة أعداد طبيعية حيث $y = \overline{131}^x$ و $z = \overline{101}^x$

1) بين أنه يمكن كتابة الجداء xyz في الأساس x وذلك بدون معرفة x .

2) عين الأعداد الطبيعية x ، y ، z علما ان $x + y + z = 50$

✓ الحل

1) لدينا $y = 1 + 3x + x^2$ و $z = 1 + x^2$

$$xyz = x(1 + 3x + x^2)(1 + x^2)$$

$$= x^3 + 3x^4 + x^5 + x + 3x^2 + x^3$$

$$= x + 3x^2 + 2x^3 + 3x^4 + x^5$$

$$= \overline{132310}^x$$

2) بتعويض y و z في المساواة $x + y + z = 50$ نجد :

$x + 1 + 3x + x^2 + 1 + x^2 = 50$ أي $2x^2 + 4x - 48 = 0$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 4$ إذن $y = 29$ و $z = 17$

تطبيق 20 حل معادلة ذات ثلاثة مجاهيل صحيحة

x و y عددان صحيحان:

1) أوجد بواقي قسمة x^2-3y^2 على 4.

2) هل توجد ثلاثة أعداد صحيحة x ، y ، z بحيث $x^2-3y^2+4z=3$ ؟

الحل

1) نضع $a=x^2-3y^2$

بما أن x و y صحيحان إما أن يكونا زوجيين أو فرديين أو أحدهما فرديا والآخر زوجيا

- الحالة الأولى x و y زوجيان:

$x=2k_1$ و $y=2k_2$ ومنه $a=4k_1^2+4k_2^2$ إذن $a\equiv0[4]$

- الحالة الثانية x و y فرديان:

$x=2k_1+1$ و $y=2k_2+1$ ومنه $a=4k_1^2+4k_1-12k_2^2-12k_2-2$ إذن $a\equiv2[4]$

- الحالة الثالثة x فردي و y زوجي:

$x=2k_1+1$ و $y=2k_2$ ومنه $a=4k_1^2+4k_1+1-12k_2^2$ إذن $a\equiv1[4]$

- الحالة الرابعة x زوجي و y فردي:

$x=2k_1$ و $y=2k_2+1$ ومنه $a=4k_1^2-12k_2^2-12k_2-3$ إذن $a\equiv1[4]$

إذن مهما يكن العددان الصحيحان x و y فإن بواقي قسمة x^2-3y^2 على 4 هي $2,1,0$

2) $x^2-3y^2+4z-3\equiv0[4]$ يكافئ $x^2-3y^2\equiv3[4]$ وهذا تناقض.

إذن لا توجد ثلاثية (x,y,z) بحيث $x^2-3y^2+4z=3$

تطبيق 21 توظيف الموافقات لمعرفة عدد عناصر مجموعة

x عدد تلاميذ قسم شعبة العلوم التجريبية حيث أنه إذا وضعناهم في مجموعات ذات عنصرين بقي لنا تلميذ واحد.

وإذا وضعناهم في مجموعات ذات ثلاثة عناصر أو خمسة بقي لنا تلميذان

- أوجد x مع العلم أن $18<x<48$.

الحل

من المعطيات يمكن أن نضع:

$$\begin{cases} x\equiv1[2] & \text{......}(1)\\ x\equiv2[3] & \text{......}(2)\\ x\equiv2[5] & \text{......}(3)\end{cases}$$

$x\equiv1[2]$ يكافئ $15x\equiv15[30]$ لأن $PGCD(15,2)=1$

$x\equiv2[3]$ يكافئ $10x\equiv20[30]$ لأن $PGCD(10,3)=1$

$x\equiv2[5]$ يكافئ $6x\equiv12[30]$ لأن $PGCD(5,6)=1$

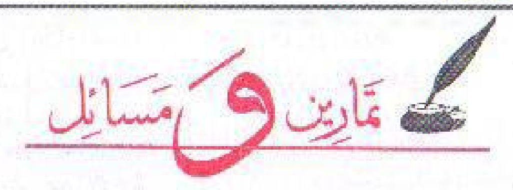
بجمع الموافقات طرفا لطرف نجد $31x\equiv47[30]$ أي $x\equiv17[30]$

إذن $x=17+30k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

بما أن $18<x<48$ فإن $1<30k<31$ ومنه $\frac{1}{30}<k<\frac{31}{30}$

ومنه $k=1$

إذن عدد التلاميذ هو $x=17+30k=47$



1

. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 11 ثم إستنتج باقي قسمة 1993^{2008} على 11؟

2) بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $(4^{10n+1} - 2^{10n+8} - 1)$ يقبل القسمة على 11

2

. 1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 8

2) ما هي مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $7^n \times n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

3

. حل في $Z \times Z$ المعادلة $3x - 7y = 5$ ......(I)

2) لتكن الثنائية (x, y) حل للمعادلة (I) .ما هي القيم الممكنة لـ y بحيث $y \equiv 0[5]$

3) ليكن (d) مستقيم معادلته $3x - 7y - 5 = 0$

أ) عين المجموعة (γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من (d) بحيث x و y صحيحان.

ب) عين المجموعة (γ_1) الجزئية من (γ) وبحيث $OM^2 \equiv 3[5]$ حيث $M(x, y)$

4

. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ يقبل القسمة على 7

5

. n عدد طبيعي يكتب $x43y$ في النظام ذو الأساس 7

عين الأرقام y, x بحيث $n \equiv 0[6]$

6

. 1) برهن ان العدد $a = 10^{6n+1} + 10^{3n+1} + 1 = 0\,[111]$

2) برهن أن العدد a يقبل القسمة على 7 وعلى 13 وهذا إذا كان n فرديا.

3) برهن ان العدد الطبيعي $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$ يقبل القسمة على 7 و 11 و 13 وهذا إذا كان n فرديا.

يمكنك كتابة $10^3 - 1 = 9 \times 111$ و $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

7

. a عدد طبيعي يكتب $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ في النظام العشري

1) اكتب a على الشكل $a = a_0 + 10k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

2) بين $5a = 5a_0 - k\,[17]$

3) بين ان $a = 0[17]$ يكافئ $5a_0 - k \equiv 0[17]$

8

. ليكن n عددا طبيعيا .

ما هو باقي قسمة $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ على 4 ؟

9

. بين انه إذا كان n ليس مضاعفا لـ 3 فإن العدد $1 + 5^n + 5^{2n}$ يقبل القسمة على 31

10

. 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 5^n على 7

2) ليكن $a_n = 16C_n^2 + 64C_n^3 + ... + 4^n C_n^n$ مع $n \geq 2$

أ) بين $a_n = 5^n - 4 - 4n$

ب) أحسب المجموع S حيث $S = a_2 + a_3 + ... + a_n$

هل توجد قيم لـ n بحيث $a_n \equiv 0[7]$ ؟

11

. 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 5

2) عين باقي قسمة $(1997)^{1524}$ على 5 .

3) أحسب بدلالة n المجموع $S = \frac{1}{Ln\,2}\left[Ln\,4 + Ln\,4^2 + ... + Ln\,4^n\right]$

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث $S + 4n^2 + 7^{4n} = 0[5]$

12

. 1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة الاقليدية للعدد 5^n على **11**

2) إستنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $(25^{1424} - 6^{2009} + 1)$ على **11**

3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $2 \times 27^{n+1} + 15 \times 16^n + 3456$ قابلا للقسمة على **11**

13

. 1) تحقق أن العدد 7 يقسم الاعداد $2^6 - 1$ ، $3^6 - 1$ ، $4^6 - 1$ ، و $5^6 - 1$

2) n عدد طبيعي و $S_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

برهن ان $S_{n+1} - S_n$ يقبل القسمة على 7

3) n عدد طبيعي و 5 باقي قسمته على 6 .

برهن ان $S_n \equiv S_r\,[7]$